Лабораторна робота №7

Розв’язання задач лінійного програмування симплекс-методом

Мета роботи: вивчення методів умовної оптимізації, оволодіння алгоритмом симплекс-методу.

Теоретичні відомості.

Задачі лінійного програмування є найпростішими серед задач умовної оптимізації і мають місце тоді, коли і цільова функція, і обмеження є лінійними функціями відносно множини параметрів оптимізації. Особливістю задач названого типу є те, що цільова функція, без врахування обмежень, немає екстремумів, а значить не може виродитись у задачу безумовної оптимізації. З іншого боку, задачі лінійного програмування складають більше половини усіх реальних задач оптимізації, особливо це відноситься до планово-організаційних та економічних задач.

Загальну задачу лінійного програмування можна поставити таким чином: Знайти невід'ємні значення змінних $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, ... $\mathbf{u_n}$, які задовольняли б умовам-рівностям

$$\begin{cases} a_{11}\cdot u_1 + & a_{12}\cdot u_2 + & \cdots + & a_{1n}\cdot u_n = & b_1 \\ a_{21}\cdot u_2 + & a_{22}\cdot u_2 + & \cdots + & a_{2n}\cdot u_n = & b_2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1}\cdot u_1 + & a_{m2}\cdot u_2 + & \cdots & a_{mn}\cdot u_n = & b_m \end{cases} \tag{7.1}$$

або умовам - нерівностям (завжди ≤)

$$\begin{cases} a_{11}\cdot u_1 + & a_{12}\cdot u_2 + & \cdots + & a_{1n}\cdot u_n \le & d_1 \\ a_{21}\cdot u_2 + & a_{22}\cdot u_2 + & \cdots + & a_{2n}\cdot u_n \le & d_2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1}\cdot u_1 + & a_{m2}\cdot u_2 + & \cdots & a_{mn}\cdot u_n \le & d_m \end{cases} \tag{7.2}$$

та надавали максимальне значення лінійній функції цих змінних - цільовій функції:

$$W = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot u_i \quad \Rightarrow \quad \max \tag{7.3}$$

При формулюванні конкретної задачі дотримуються обмежень одного типу, а вибір обмежень у вигляді рівностей або нерівностей пов'язаний з різними канонічними формами запису задачі. Оскільки між ними перехід відбувається досить легко, у визначенні вказують обидва випадки.

Для розв'язання задач лінійного програмування розроблено ряд алгоритмів, серед яких найбільш ефективним вважається симплекс-метод. Симплекс-метод пов’язаний з вибором початкового допустимого базису, та покрокового переходу до допустимих базисів, що забезпечують більш оптимальне значення функції.

Покроковий алгоритм симплекс-методу може бути записаний як:

Крок 1. Вибираємо **m** змінних, які задають допустимий пробний розв'язок. Виключаємо ці змінні з виразу для цільової функції.

Крок 2. Перевіряємо, чи є можливість за рахунок однієї зі змінних, які мали спочатку нульові значення, покращити значення цільової функції, надаючи відповідній змінній відмінні від нуля (причому позитивні) значення. Якщо це можливо - переходимо до кроку 3. В іншому випадку припиняємо обчислення і вважаємо, що максимуму цільової функції досягнуто.

Крок 3. Знаходимо граничне значення змінної, за рахунок якої можна покращити значення цільової функції. Збільшення значення цієї змінної допускається до тих пір, поки одна з m змінних, відмінних раніше від нуля, не перетвориться в **0**. Виключимо з виразу для цільової функції цю змінну, і введемо в пробний розв'язок ту змінну, за рахунок якої результат можна покращити .

Крок 4. Розв'язати систему **m** рівнянь відносно змінних, що складають поточний пробний розв'язок. Виключити ці змінні з виразу цільової функції. Повернутися до кроку 2.

Для виконання кроку 2 застосовують симплекс-критерій 1, який у випадку пошуку максимуму має вигляд:

Якщо в рядку **/0/** (цільової функції) є небазисні змінні, коефіцієнти при яких від'ємні, потрібно вибрати змінну $(\mathbf{x_j})$ з найбільшим абсолютним значенням від'ємного коефіцієнта, - ту змінну, яка забезпечує найбільший питомий приріст значення цільової функції. У випадку, коли усі небазисні змінні в рядку **/0/** позитивні або нульові, оптимальний розв'язок можна вважати знайденим.

При виконанні кроку 3, використовується симплекс-критерій 2, що має вигляд:

Розглядаються відношення чисел, які стоять в правих частинах рівнянь-обмежень до відповідних коефіцієнтів при новій базисній змінній (не приймаючи до уваги відношення, в яких знаменник дорівнює нулю чи являє собою від'ємне число). Вибирається відношення з найменшим значенням.

Докладний приклад симплекс-методу наведено в [4], стор.88.

Рекомендації з розрахунків

Симплекс-метод порівняно просто реалізується як в електронних таблицях так і шляхом створення програми мовою високого рівня.

При реалізації в середовищі електронних таблиць, доцільно створити шаблон-таблицю для усіх рядків симплекс-таблиці, та пере обчислювати його від ітерації до ітерації.

Завдання на лабораторну роботу

Використовуючи симплекс-метод, знайти максимум лінійної функції при наявності лінійних обмежень за завданням викладача.

Контрольні запитання:

1. Які значення допустимі для базисних змінних в канонічному формулюванні симплекс-методу?
2. Які значення допустимі для небазисних змінних в канонічному формулюванні симплекс-методу?
3. Чи можливі для задачі лінійного програмування 2 рівноцінні розв’язки?

Рекомендована література: [1], [4], [5], [6]