Лабораторна робота №5

Оптимізація функції декількох змінних методом пошуку за симплексом.

Мета роботи: здобуття практичних навичок використання методу пошуку за симплексом для оптимізації функції декількох змінних.

Теоретичні відомості

Метод пошуку за симплексом являється одним з універсальних методів прямого пошуку, який дозволяє однаково успішно оптимізувати функції як з простою так і зі складною томограмою. Метод запропоновано Спендлі (W. Spendley), Хекстом (G.R. Hext) та Хімсвортом (F.R.Himsworth). Для своєї реалізації метод потребує значення функції у **N+1** точці, розташованій у вузлах регулярного симплексу (де **N** - розмірність системи, кількість незалежних змінних). На кожній ітерації потрібне знаходження значення функції всього в одній точці.

Регулярний симплекс являє собою гіпертіло з рівними ребрами у межах заданої розмірності та вибраного масштабу. Прикладом симплексу для випадку функції двох змінних є рівносторонній трикутник, функції трьох змінних - тетраедр тощо.

Алгоритм оптимізації полягає в наступному:

Крок 1. Починаючи з нульової точки побудувати початковий симплекс.

Крок 2. Знайти значення функції у всіх вузлах симплексу.

Крок 3. Вибрати вузол симплексу з найбільшим значенням функції і знайти його проекцію через центр маси решти точок - створити новий симплекс.

Крок 4. Повторити процедуру кроків 2 та 3.

Для успішного використання пошуку за симплексом необхідно дотримуватись трьох правил:

Правило 1. Якщо вузол симплексу, якому відповідає найбільше значення функції, одержано на попередній ітерації, то наступною відображається не ця точка, а точка, значення функції в якій наступне за величиною.

Правило 2. Якщо деякий вузол симплексу не виключається з розгляду на протязі M ітерацій, то необхідно зменшити розмір симплексу, перебудувавши його з вказаної точки. Число M визначається виключно розмірністю задачі і може бути знайдене за формулою:

$$M = 1.65 \cdot N + 0.05 \cdot N^2 \qquad (5.1)$$

з заокругленням до найближчого цілого числа.

Правило 3. Пошук завершується, коли розміри симплексу та різниці значень функції у вузлах стають досить малими.

Крок 1 алгоритму виконується шляхом побудови матриці, елементи якої являють собою координати вершин симплексу. При цьому існуюча точка вважається $\mathbf{X}_0$, а координати решти точок одержують з виразу:

$$x_j^{(i)} = \begin{cases} x_j^{(0)} + \delta_1, & \text{якщо} \quad j \neq i \\ x_j^{(0)} + \delta_2, & \text{якщо} \quad j = i \end{cases} \qquad i, j = 1,2,3,\ldots N,$$

де $x_j^{(i)}$- j-та координата i-ї точки симплексу.

Коефіцієнти δ_1 та δ_2 обчислюються за формулами:

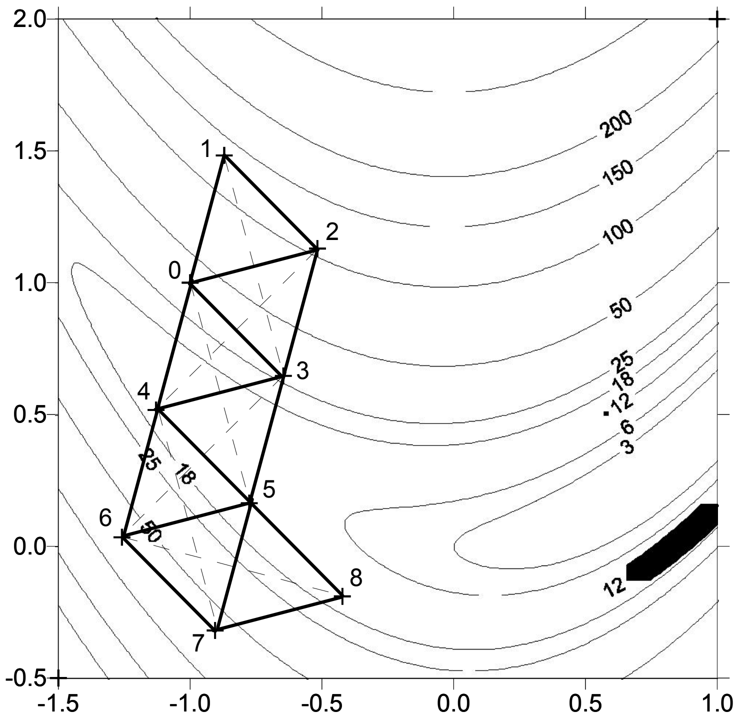
$$\delta_1 = \left[\frac{\sqrt{N+1} + N - 1}{N \cdot \sqrt{2}} \right] \cdot \alpha \quad \delta_2 = \left[\frac{\sqrt{N+1} - 1}{N \cdot \sqrt{2}} \right] \cdot \alpha \qquad (5.2)$$

Процедуру відображення точки відносно центру маси побудована, виходячи з таких співвідношень: нехай $\mathbf{X}^{(j)}$- точка, яка підлягає відображенню. Центр маси решти точок знаходиться у точці $\mathbf{X_C}$, з координатами:

$$x_{Cl} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N} x_l^{(i)} \qquad \mathbf{l=1,2,\ldots N} \qquad (4\text{-}25)$$

Таким чином усі точки прямої, проведеної через точку, яку виключають з розгляду описуються рівнянням $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(j)} + \lambda\, (\mathbf{X_C} - \mathbf{X}^{(j)})$, яке у тому ж вигляді переписується для кожної координати.

При $\lambda = \mathbf{0}$, одержуємо саму точку; яка відображається, при $\lambda = \mathbf{1}$ - точку, що співпадає з центром маси решти, при $\lambda = \mathbf{2}$ - нову точку.



x_1	x_2	Q
-1.00	1.00	37.00
-0.87	1.48	132.38
-0.52	1.13	106.06
-0.65	0.65	27.27
-1.13	0.52	15.06
-0.78	0.16	11.35
-1.26	0.03	72.80
-0.91	-0.32	64.07
-0.42	-0.19	13.87

Рисунок 5.1. Схема роботи алгоритму пошуку мінімума функції двох змінних за симплексом

Таблиця 5.1 - Значення δ_1 та δ_2 для різних значень **N** та α**=1**

N	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
δ_1	**0.9659**	**0.9428**	**0.9256**	**0.9121**	**0.9011**
δ_2	**0.2588**	**0.2357**	**0.2185**	**0.2050**	**0.1939**

Таблиця 5.1. містить приклад значень коефіцієнтів δ_1 та δ_2 при значенні α**=1** і кількості параметрів оптимізації від 2 до 6.

До переваг методу пошуку за симплексом можна віднести:

просту логічна структура та розрахунки, що полегшує програмування методу;

порівняно невисокий рівень вимог до пам'яті комп'ютера, оскільки необхідно зберігати невелику кількість проміжних результатів;

невелика кількість наперед встановлених параметрів серед яких - масштабний множник, коефіцієнт його зменшення, критерії зупинки пошуку;

До недоліків методу відносять:

- необхідність масштабування, оскільки різні незалежні змінні являють собою різнорідні величини, що вимірюються часто у різних одиницях вимірювання, і у числовому вигляді можуть мати навіть різний порядок;
- низьку швидкість алгоритму, особливо для функцій, що мають форму вигнутих ярів;
- необхідність при кожному масштабуванні практично заново будувати симплекс.

Завдання на лабораторну роботу

В середовищі електронних таблиць знайти мінімум функції 3-х змінних за завданням викладача.

Контрольні запитання:

1. Скільки вершин містить симплекс при оптимізації функції чотирьох змінних?
2. Чи доцільно використовувати метод пошуку за симплексом під час експериментальної оптимізації? Чому?
3. Чи залежить точність та швидкість алгоритму пошуку за симплексом від правильного відносного масштабування різнорідних незалежних змінних.

Рекомендована література: [1], [4], [5]