Лабораторна робота №3

Ідентифікація параметрів окремих випадків детермінованої нелінійної моделі методом найменших квадратів

Мета роботи: здобуття практичних навичок застосування методу найменших квадратів для ідентифікації параметрів нелінійних моделей, які лінійні відносно параметрів ідентифікації.

Теоретичні відомості.

Математичні моделі нелінійних систем в загальному випадку описуються багатовимірною функцією декількох змінних: $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$.

Для ідентифікації параметрів такої моделі використовують декілька підходів, які опираються на кусочно-лінійне та функціональне уявлення залежності виходу моделі від вектора її входів, в залежності від об'єму та виду наявної інформації про поведінку системи.

При роботі з функціональними моделями невідому функцію об'єкта $\mathbf{F_0}(\mathbf{X})$ представляють у вигляді відомої функції з невідомими параметрами: $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X},\mathbf{C})$, де $\mathbf{F}(*,*)$ - векторна функція двох векторних аргументів:

- входу $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- невідомих параметрів $C = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$.

Спосіб завдання такої функції визначається з точністю до вектора постійних параметрів $\mathbf{C}$ на основі апріорних відомостей про об'єкт ідентифікації. При відомій структурі ідентифікація проводиться на основі інформації $\mathbf{I} = \langle \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i \rangle$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_i, \mathbf{C}) = \mathbf{Y}_i \qquad (i = 1, ..., N), \tag{3.1}$$

що являє собою систему трансцендентних рівнянь відносно параметрів $\mathbf{C}$. Такі системи можна розв'язувати напряму: методами Ньютона або ітерацій, але основні методи розв'язку пов'язані з мінімізацією функції сумарного розбігу:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^{N} q_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\mathbf{F}(\mathbf{X}_i, \mathbf{C}) - \mathbf{Y}_i\right]^2 \to \min_{\mathbf{C} \in \mathbf{R}} \tag{3.2}$$

якщо локальний розбіг:

$$q_i = \left|\mathbf{F}(\mathbf{X}_i, \mathbf{C}) - \mathbf{Y}_i\right| \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

Якщо функція **F** - диференційована, то ця задача зводиться до системи ***k*** рівнянь з ***k*** невідомими:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{C})}{\partial c_j} = 2\sum_{i=1}^{N} \left[\mathbf{F}(\mathbf{X}_i, \mathbf{C}) - \mathbf{Y}_{i,} \; \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}_i, \mathbf{C})}{\partial c_j} \right] = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k), \tag{3.3}$$

де квадратними дужками показано скалярний добуток векторів. Це також система трансцендентних рівнянь, розв'язок якої не є простішим ніж розв’язок початкової, але вона враховує усю наявну інформацію, і у ній кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь. У ряді випадків для розв'язання задачі мінімізації функції сумарного розбігу використовують методи пошукової оптимізації.

Окрему групу нелінійних моделей, за алгоритмами ідентифікації складають моделі, лінійні відносно параметрів ідентифікації. Такі моделі утворюються в результаті розкладання функції моделі за заданою системою функцій:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \mathbf{\Phi}_j(\mathbf{X}) \tag{3.4}$$

де $\mathbf{\Phi}_j(\mathbf{X})$ - задана система векторних функцій, вибрана на етапі структурної ідентифікації.

Функція розбігу в такому випадку має вигляд:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^{N} \left[\sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \mathbf{\Phi}_j(\mathbf{X}_i) - \mathbf{Y}_i \right]^2 \tag{3.5}$$

Похідні цієї функції лінійні відносно параметрів ідентифікації:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial c_l} = 2\sum_{i=1}^{N} \left[\left(\sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{\Phi}_j(\mathbf{X}_i) - \mathbf{Y}_i\right), \mathbf{\Phi}_l(\mathbf{X}_i) \right] \qquad l = 1, \ldots, k \tag{3.6}$$

Прирівнявши ці похідні нулю, одержимо систему ***k*** лінійних рівнянь з ***k*** невідомими:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{i=1}^{N} \left[\mathbf{\Phi}_j(\mathbf{X}_i), \mathbf{\Phi}_l(\mathbf{X}_i)\right] = \sum_{i=1}^{N} \left[\mathbf{Y}_i, \mathbf{\Phi}_l(\mathbf{X}_i)\right] \qquad (l = 1, \ldots, k) \tag{3.7}$$

У тому випадку, коли систему функцій вибрано ортогональною, а значить такою, що

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\mathbf{\Phi}_j(\mathbf{X}_i), \mathbf{\Phi}_l(\mathbf{X}_i)\right] = \begin{cases} 0 & j \neq l \\ b_l & j = l \end{cases} \tag{3.8}$$

уся система розпадається на ***k*** рівнянь з одним невідомим, при розв'язку яких одержуємо:

$$c_l^* = \frac{1}{b_l} \sum_{i=1}^{N} \left[\mathbf{Y}_i, \mathbf{\Phi}_l(\mathbf{X}_i)\right] \qquad (l = 1, \ldots, k) \tag{3.9}$$

Окремим випадком функціональних моделей, лінійних відносно параметрів ідентифікації є поліноміальні моделі, де система функцій у випадку однієї змінної має вигляд: $\Phi = 1, x, x^2, \ldots, x^n$, де ***n*** може досягати ***k***-1 (***k*** – кількість двійок інформації). Особливість поліноміальних моделей полягає в тому, що система ідентифікації суттєво спрощується.

<u>Реалізація розрахунків в системі електронних таблиць</u>

Для реалізації розрахунків в середовищі електронних таблиць необхідно виконати чотири етапи:

1) заповнити таблицю вихідними даними, виділивши для значень кожного з аргументів, та значення функції окремий стовпчик;
2) при побудови моделі, що базується на системі функцій, відмінній від поліноміальної сформувати окремі стовпчики значень для кожної функції;
3) використовуючи вбудовані функції електронних таблиць (як наприклад для підрахунку клітинок в діапазоні, підрахунок суми діапазону, підрахунок суми добутків визначених діапазонів) сформувати розширену матрицю системи лінійних рівнянь;
4) знайти корені системи лінійних рівнянь, застосовуючи метод Гауса або матричний метод з використанням вбудованих функцій матричної алгебри;

5) знайти розрахункові значення функції у експериментальних точках, якісно оцінити відхилення розрахункових значень від реальних значень функції, використаних для ідентифікації параметрів моделі.

Завдання на лабораторну роботу

Знайти параметри моделі вигляду:

$$y = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_1^2 + c_4 x_2^2 + c_5 x_1 x_2$$

використовуючи в якості інформації таблицю наведену нижче, або розв’язати іншу задачу ідентифікації параметрів за вказівкою викладача.

X1	X2	F(X)
1.20	1.40	12.78
1.30	2.50	19.75
1.50	4.10	31.78
2.80	2.60	29.02
2.90	1.20	17.92
3.10	4.90	52.09
4.50	3.00	41.63
4.50	2.50	36.10
4.60	1.50	25.61
5.50	5.00	72.33
5.70	1.30	25.64

Контрольні запитання:

1. До ідентифікації яких нелінійних моделей можна застосовувати метод найменших квадратів без суттєвої модифікації?
2. Чи можливо ліанеризувати, і як, модель виду $y = a_0 \cdot x^{a_1}$?

Рекомендована література: [1], [2], [3], [4]