Лабораторна робота №2

Ідентифікація параметрів статичної детермінованої лінійної моделі методом найменших квадратів

Мета роботи: здобуття практичних навичок застосування методу найменших квадратів для ідентифікації параметрів лінійних моделей.

Теоретичні відомості

Модель лінійного об'єкта (лінійна модель) з $\boldsymbol{n}$ входами та $\boldsymbol{m}$ виходами має єдино можливу структуру і описується системою лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= c_{10} + c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n \\
y_2 &= c_{20} + c_{21}x_1 + \ldots + c_{2n}x_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_m &= c_{m0} + c_{m1}x_1 + \ldots + c_{mn}x_n
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

В результаті необхідно знайти $\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{n}+1)$ параметрів - коефіцієнти c_{ij}. Ту ж систему рівнянь можна записати у векторній формі:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C_0} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \tag{2.2}$$

де $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $\mathbf{C}_0 = (c_{01}, c_{02}, \ldots, c_{0m})$

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{Vmatrix}$$

Ідентифікувати необхідно вектор $\mathbf{C_0}$ та матрицю $\mathbf{C}$.

Використання процедури декомпозиції дозволяє нам переходити від загального випадку до випадку $\boldsymbol{n}>\mathbf{1}$, $\boldsymbol{m}=\mathbf{1}$.

Модель такого об'єкта у векторній формі має вигляд: $y = c_0 + [\mathbf{C}, \mathbf{X}]$, де квадратними дужками позначено скалярний добуток векторів $\mathbf{C}$ та $\mathbf{X}$:

$$[\mathbf{C},\mathbf{X}]=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i \tag{2.3}$$

У скалярній формі модель має вигляд:

$$y=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{2.4}$$

Модель має ***k***=***n***+***1*** невідомих параметрів, що підлягають оцінці на основі інформації про роботу об'єкта, яка звичайно представляється у вигляді M двійок $\mathbf{B}=\langle \mathbf{X}_j, y_j\rangle \quad (j=1,\ldots,M)$.

Прирівнюючи виходи моделі та об'єкта на M двійках одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$c_0+\sum_{i=1}^{n}c_i x_{ij}=y_j\,, \qquad (j=1,\ldots,M) \tag{2.5}$$

Ця система і є системою ідентифікації параметрів, яка складається з **M** лінійних рівнянь з ***n***+**1** невідомим. Така система рівнянь має однозначний розв'язок тільки у випадку, коли ранг матриці цієї системи дорівнює ***n***+**1**, іншими словами якщо знайдеться ***n***+**1** лінійно-незалежне рівняння. В такому випадку розв'язок системи гарантує визначення точних значень параметрів, що ідентифікуються, якщо об'єкт дійсно є лінійним. Більш часто зустрічається випадок, коли об'єм інформації більше необхідного, і система ідентифікації містить більше ***n***+**1** лінійно-незалежне рівняння.

Для більш повного врахування усієї наявної інформації використовують алгоритм, що в загальному випадку має назву методу найменших квадратів

Запишемо функцію сумарного розбігу виходів моделі та системи у вигляді:

$$\mathbf{Q(C)}=\sum_{i=1}^{M}q_i^2(\mathbf{C})\,, \tag{2.6}$$

де $\boldsymbol{q}_i$ - локальна нев'язка на i-й двійці інформації,

$$q_i=c_0+\sum_{j=1}^{n}c_j x_{ji}-y_i \tag{2.7}$$

Тепер задачу оцінки параметрів **C** можна записати як задачу мінімізації функції сумарного розбігу, яка має декілька важливих властивостей:

- функція сумарного розбігу може приймати тільки позитивні значення;
- функція сумарного розбігу в координатах параметрів моделі має мінімум, положення якого повністю визначає ці параметри.

Таким чином, тепер задача ідентифікації параметрів зводиться до оптимізації спеціально сконструйованої функції.

Для розв'язку поставленої задачі скористаємося загальними властивостями функції у точці екстремуму.

Необхідною умовою існування екстремуму (мінімуму чи максимуму) функції у точці є рівність нулю усіх частинних похідних функції по кожній невідомій. Невідомими виступають параметри моделі c_0, c_1, ... c_n, тому умова існування екстремуму:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial c_i} = 0 \qquad i = 0,1,\ldots,n, \tag{2.8}$$

Записане вище являє собою систему диференційних рівнянь в частинних похідних. Особливості структури функції сумарного розбігу надають декілька переваг, а саме – функція має тільки мінімум, необхідна умова (2.8) стає достатньою, а система диференційних рівнянь (2.8) легко перетворюється в систему лінійних алгебраїчних рівнянь: [5]

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{M}\left[\sum\limits_{l=0}^{n} c_l \cdot x_{lj} - y_j\right] = 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{M}\left[\sum\limits_{l=0}^{n} c_l \cdot x_{lj} - y_j\right] \cdot x_{ij} = 0 \end{cases} \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

або розкривши усі дужки:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{M}\sum\limits_{l=0}^{n} c_l \cdot x_{lj} = \sum\limits_{j=1}^{M} y_j \\ \sum\limits_{j=1}^{M}\sum\limits_{l=0}^{n} c_l \cdot x_{lj} = \sum\limits_{j=1}^{M} y_j \cdot x_{ij} \end{cases} \qquad i = 1,2,\ldots,n, \tag{2.9}$$

Таким чином система (2.9) є системою n+1 лінійного рівняння з n+1 невідомою, розв'язок якої дозволяє знайти заданий набір параметрів моделі.

Вигляд матриці системи (2.9) повністю визначається структурою моделі та використаною інформацією $\mathbf{B} = \left\langle \mathbf{X}_j, y_j \right\rangle \qquad \left(j = 1, \ldots, M \right)$. Тому, якщо інформації недостатньо система ідентифікації може виявитись недовизначеною, що не дозволить визначити параметри моделі. У таких випадках можливі два варіанти подальших дій:

а) повторити вимірювання з надією, що попередні виявились непридатними за простим збігом обставин: варіанти зміни вхідних параметрів, або хоча б одного з них були недостатньо різноманітними.

б) понизити кількість параметрів моделі, виключивши ті з них, які мають недостатній діапазон зміни.

Реалізація розрахунків в системі електронних таблиць

Для реалізації розрахунків в середовищі електронних таблиць необхідно виконати чотири етапи:

1) заповнити таблицю вихідними даними, виділивши для значень кожного з аргументів, та значення функції окремий стовпчик;
2) використовуючи вбудовані функції електронних таблиць (як наприклад для підрахунку клітинок в діапазоні, підрахунок суми діапазону, підрахунок суми добутків визначених діапазонів) сформувати розширену матрицю системи лінійних рівнянь;
3) знайти корені системи лінійних рівнянь, застосовуючи метод Гауса або матричний метод з використанням вбудованих функцій матричної алгебри;
4) знайти розрахункові значення функції у експериментальних точках, якісно оцінити відхилення розрахункових значень від реальних значень функції, використаних для ідентифікації параметрів моделі.

Завдання на лабораторну роботу

В середовищі електронних таблиць знайти параметри моделі вигляду: $y = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$, використовуючи в якості інформації таблицю наведену нижче, або розв'язати іншу задачу ідентифікації параметрів за вказівкою викладача.

X1	X2	X3	F(X)
1.20	1.20	2.20	2.22
1.50	1.80	1.80	5.22
1.80	2.30	3.30	3.43
2.20	3.50	1.40	11.63
2.70	3.50	3.20	8.41
3.00	1.30	1.60	7.85
3.20	3.00	2.40	10.28
3.30	1.90	1.40	10.37
3.80	2.50	3.50	7.81
4.00	1.40	2.20	8.84

Контрольні запитання:

1. Як пов'язані кількість коефіцієнтів, моделі та кількість рівнянь в системі ідентифікації?
2. Про що свідчить наявність лінійної залежності системи рівнянь ідентифікації?

Рекомендована література: [1], [2], [3], [4]