Лабораторна робота №1
Розв’язання системи лінійних рівнянь методом Гауса.

<u>Мета роботи:</u> Практичне оволодіння методом Гауса для розв’язання систем лінійних рівнянь, засвоєння впливу рангу матриці системи рівнянь на наявність коренів останньої

<u>Теоретичні відомості</u>

Метод Гауса являється одним з розповсюджених методів розв'язання нормально визначених систем лінійних рівнянь і полягає в послідовному виключенні невідомих. Суть методу Гауса полягає в тому що вихідна матриця системи лінійних рівнянь через лінійні перетворення приводиться до трикутного вигляду – коли усі елементи, що знаходяться нижче головної діагоналі дорівнюють нулю.

Для простоти математичних викладок обмежимось системою чотирьох рівнянь з чотирма невідомими:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & a_{13}\cdot x_3 & + & a_{14}\cdot x_4 & = & a_{15} \\ a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & a_{23}\cdot x_3 & + & a_{24}\cdot x_4 & = & a_{25} \\ a_{31}\cdot x_1 & + & a_{32}\cdot x_2 & + & a_{33}\cdot x_3 & + & a_{34}\cdot x_4 & = & a_{35} \\ a_{41}\cdot x_1 & + & a_{42}\cdot x_2 & + & a_{43}\cdot x_3 & + & a_{44}\cdot x_4 & = & a_{45} \end{array}\right\} \quad (1.1)$$

Нехай $a_{11} \neq 0$ – ведучий елемент. Розділивши коефіцієнти першого рівняння системи на a_{11}, одержимо:

$$x_1 + b_{12}\cdot x_2 + b_{13}\cdot x_3 + b_{14}\cdot x_4 = b_{15}, \quad (1.2)$$

де

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j > 1).$$

Використовуючи рівняння (1.2), можна виключити з системи (1.1) невідому x_1. Для цього достатньо від другого рівняння системи (1.1) відняти рівняння (1.2), помножене на a_{21}, від третього рівняння системи (1.1) відняти рівняння (1.2), помножене на a_{31}, тощо. В результаті одержимо систему з трьох рівнянь:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{22}^{(1)}\cdot x_2 & + & a_{23}^{(1)}\cdot x_3 & + & a_{24}^{(1)}\cdot x_4 & = & a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}\cdot x_2 & + & a_{33}^{(1)}\cdot x_3 & + & a_{34}^{(1)}\cdot x_3 & = & a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}\cdot x_2 & + & a_{43}^{(1)}\cdot x_2 & + & a_{44}^{(1)}\cdot x_2 & = & a_{45}^{(1)} \end{array}\right\} \qquad (1.1')$$

де коефіцієнти $a_{ij}^{(1)}$ $(i, j \geq 2)$ обчислюються за формулою:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}\cdot b_{1j} \quad (i, j \geq 2) \qquad (1.3)$$

Повторивши процедуру ділення коефіцієнтів першого рівняння нової системи на її ведучий елемент (1.2') і виключивши x_2 з розгляду одержимо систему двох лінійних рівнянь (1.1").

$$x_2 + b_{23}^{(1)}\cdot x_3 + b_{24}^{(1)}\cdot x_4 = b_{25}^{(1)} \qquad (1.2')$$

де

$$b_{2j}^{(1)} = a_{2j}^{(1)} \Big/ a_{22}^{(1)} \quad (j > 2).$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{33}^{(2)}\cdot x_3 & + & a_{34}^{(2)}\cdot x_4 & = & a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)}\cdot x_3 & + & a_{44}^{(2)}\cdot x_4 & = & a_{45}^{(2)} \end{array}\right\} \qquad (1.1'')$$

де

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}\cdot b_{2j}^{(1)} \quad (i, j \geq 3).$$

Розділивши коефіцієнти першого рівняння системи (1.1") на новий ведучий елемент - $a_{33}^{(2)}$ одержимо:

$$x_3 + b_{34}^{(2)}\cdot x_4 = b_{35}^{(2)} \qquad (1.2'')$$

де

$$b_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(2)} \Big/ a_{33}^{(2)} \quad (j > 3).$$

Виключивши за допомогою уже описаних операцій x_3 з розгляду, одержимо:

$$a_{44}^{(3)}\cdot x_4 = a_{45}^{(3)} \qquad (1.1''')$$

де

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{i3}^{(2)}\cdot b_{3j}^{(2)} \quad (i, j \geq 4).$$

Таким чином, очевидно, що без порушення математичної стрункості, система (2.1) може бути записана у вигляді (2.4):

$$\left.\begin{array}{rrrrrrrrr} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & a_{13}\cdot x_3 & + & a_{14}\cdot x_4 & = & a_{15} \\ & & a_{22}^{(1)}\cdot x_2 & + & a_{23}^{(1)}\cdot x_3 & + & a_{24}^{(1)}\cdot x_4 & = & a_{25}^{(1)} \\ & & & & a_{33}^{(2)}\cdot x_3 & + & a_{34}^{(2)}\cdot x_4 & = & a_{35}^{(2)} \\ & & & & & & a_{44}^{(3)}\cdot x_4 & = & a_{45}^{(3)} \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

Система (2.4) може бути досить просто розв'язана:

$$x_4 = a_{45}^{(3)} \Big/ a_{44}^{(3)} \tag{1.5}$$

$$x_3 = \frac{a_{35}^{(2)} - a_{34}^{(2)}\cdot x_4}{a_{33}^{(2)}} \tag{1.6}$$

$$x_2 = \frac{a_{25}^{(1)} - a_{24}^{(1)}\cdot x_4 - a_{23}^{(1)}\cdot x_3}{a_{22}^{(1)}} \tag{1.7}$$

$$x_1 = \frac{a_{15} - a_{14}\cdot x_4 - a_{13}\cdot x_3 - a_{12}\cdot x_2}{a_{11}} \tag{1.8}$$

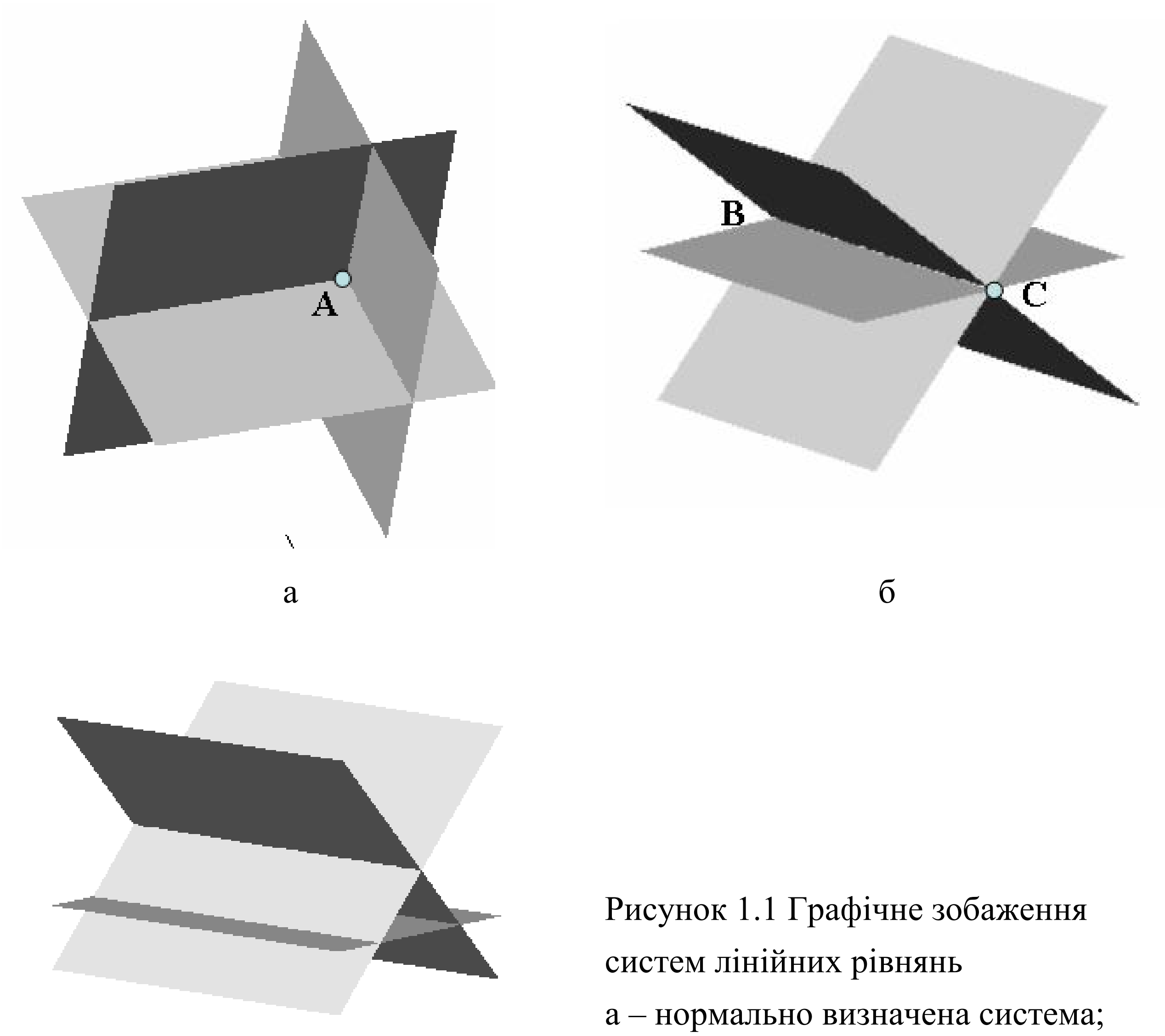
Послідовність рівностей (1.5)-(1.8) називається зворотнім ходом методу Гауса.

Таким чином процес розв'язку системи лінійних рівнянь за методом Гауса зводиться до побудови еквівалентної системи лінійних рівнянь з трикутною матрицею – прямого ходу і послідовного знаходження коренів, починаючи з більших номерів – зворотного ходу.

Описаний алгоритм методу Гауса дозволяє розв’язати нормально визначену систему лінійних рівнянь – сумісну систему, в якій кількість невідомих рівна рангу матриці системи. Взагалі прийнято розрізняти 3 варіанти систем лінійних рівнянь, умовно показаних на рис. 1.1 (випадок трьох рівнянь з трьома невідомими).

Нормально визначена система рівнянь (рис. 1.1 а) своїм розв’язком має точку А, координати якої і являються компонентами розв’язку. Недовизначена система рівнянь (рис. 1.1 б) є наслідком лінійної залежності окремих рівнянь, і, як наслідок зниження рангу матриці системи. Така система рівнянь має безліч розв’язків, які належать, в зображеному випадку, одній прямій ВС. Несумісна система рівнянь (рис.

1.1 в) звичайно одержується у випадку коли основна матриця системи та її розширена матриця мають різний ранг.



а б

в

Рисунок 1.1 Графічне зобаження систем лінійних рівнянь
а – нормально визначена система;
б – недовизначена система;
в – несумісна система.

Нормально визначена система рівнянь (рис. 1.1 а) своїм розв'язком має точку А, координати якої і являються компонентами розв'язку. Недовизначена система рівнянь (рис. 1.1 б) є наслідком лінійної залежності окремих рівнянь, і, як наслідок зниження рангу матриці системи. Така система рівнянь має безліч розв'язків, які належать, в зображеному випадку, одній прямій ВС. Несумісна система рівнянь (рис.

1.1 в) звичайно одержується у випадку коли основна матриця системи та її розширена матриця мають різний ранг.

<u>Реалізація методу Гауса</u>

Серед комп'ютерних реалізацій методу Гауса варто віддати перевагу програмі мовою програмування високого рівня. Створення програми мовою Borland Pascal розглянуте в курсі інформатики. Неавтоматизований розв'язок систем рівнянь в середовищі електронних таблиць має ряд недоліків, як наприклад його орієнтація на систему рівнянь сталої розмірності. Проте суттєвою перевагою такої реалізації є можливість постійного контролю усіх коефіцієнтів матриці.

Для розв'язку системи лінійних рівнянь в середовищі таблиць Excel занесемо розширену матрицю системи в довільну прямокутну область електронного бланку (рис.1.2)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		1.2	2.4	5.2	7.3	22.79	
3		4.6	8.3	3.3	2.5	24.68	
4		11.3	4.8	5.1	3.3	31.89	
5		4.1	5.2	6.3	7.4	31.60	
6							

Рисунок 1.2 Матриця системи лінійних рівнянь занесена до електронного бланку Excel

Слідуючи алгоритму, перетворимо у 0 (нуль) елементи клітинок B3, B4 та B5. для цього в клітинці B7 запишемо формулу:

```
= B3 – B$2 * $B3 / $B$2.
```

Застосування різних типів адресації дозволяє записати формулу один раз і використати процедуру автозаповнення для копіювання формули в клітинки діапазону B7:F9. В результаті у вказаному діапазоні буде знаходитись система трьох рівнянь х трьома невідомими (рис. 1.3).

	A	B	C	D	E	F	G
6							
7		0.00	-0.90	-16.63	-25.48	-62.68	
8		0.00	-17.80	-43.87	-65.44	-182.72	
9		0.00	-3.00	-11.47	-17.54	-46.27	
10							
11							

Рисунок 1.3 Вигляд частини матриці системи після першого перетворення.

Застосувавши таку ж процедуру, до одержаної матриці одержимо спочатку систему двох рівнянь з двома невідомими а потім одне рівняння з одним невідомим.

Зворотній хід методу Гауса не потребує коментарів.

Завдання на лабораторну роботу

Розв'язати систему лінійних рівнянь задану на рис. 1.2, або іншу задану викладачем в середовищі електронних таблиць.

Дослідити, як впливає на вигляд проміжних та кінцевих результатів заміна четвертого рядка такими (3,3 -9,4 3,7 5,6 5,32) та (3,3 -9,4 3,7 5,6 8,42).

Пояснити одержані результати.

Для самомконтролю розв'язати кожну з запропонованих систем лінійних рівнянь матричним методом, використовуючи вбудовані формули Excel:

MINVERSE (МОБР) – обернена матриця,

MMULT (МУМНОЖ) – множення матриць.

Пам'ятайте, що при використанні матричних функцій Excel, коли результат займає декілька клітинок, введення формули слід завершувати комбінацією клавіш **<Ctrl><Shift><Enter>**

Контрольні запитання:

1. Що визначає сумісність системи лінійних рівнянь?
2. Як можна вдосконалити метод Гауса для розв'язання систем рівнянь з локальною лінійною залежністю?

3. Чи впливає локальна лінійна залежність системи лінійних рівнянь на результат розв’язку матричним методом

Рекомендована література: [1], [2], [3].