Лабораторна робота № 6

Розробка програми для наближеного інтегрування функції однієї змінної

Мета роботи: практично засвоїти програмування квадратурних формул трапецій та Симпсона.

Теоретичні відомості

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і відома її первісна $F(x)$, то визначений інтеграл від цієї функції в межах від a до b можна обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{6.1}$$

Однак, в багатьох випадках первісну функцію за допомогою елементарних засобів знайти не вдається. Тим більше, вираз первісної недоступний при комп'ютерній обробці даних. В усіх цих випадках формула (6.1) не може бути застосована практично і необхідно говорити про застосування методів наближеного інтегрування.

Формули, за допомогою яких ведеться числове інтегрування, одержали назву квадратурних формул. Найбільш розповсюдженими серед них є формула трапецій та формула парабол або Симпсона. Об'єднує квадратурні формули те, що для обчислення значення інтеграла використовується його фізичний зміст – рівність визначеного інтеграла площі під кривою підінтегральної функції (у випадку: $f(x) > 0$).

<u>Формула трапецій</u>

Визначений інтеграл (6.2) чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції $ABCD$, яка обмежена частиною осі абсцис, двома прямими $x = a$, $x = b$ та кривою підінтегральної функції (рис.6.1.)

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{6.2}$$

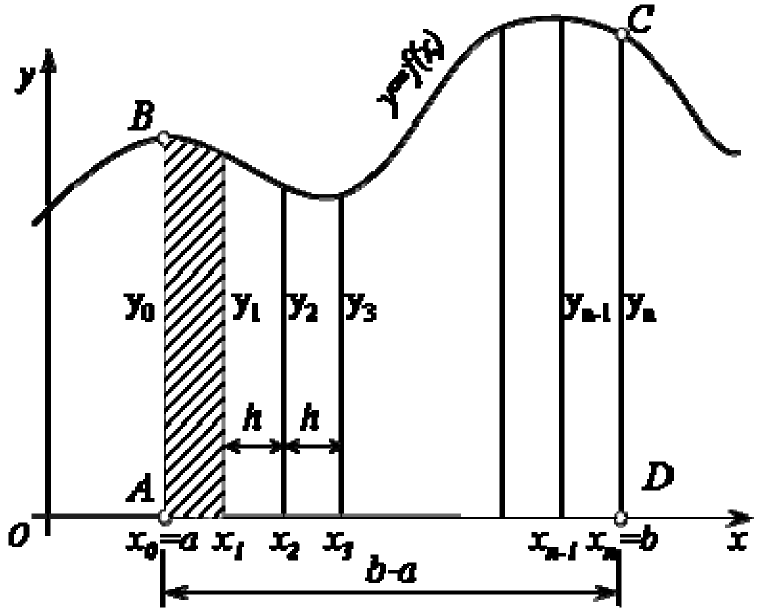

Рисунок 6.1 Схема до обчислення інтеграла за формулою трапецій

Для того, щоб знайти наближене значення площі S, розділимо відрізок AD точками $x_0 = a$, x_1, x_2, $\ldots$, $x_n = b$ на n рівних частин, проведемо через ці точки ординати y_0, y_1, y_2, $\ldots$, y_{n-1}, y_n і з'єднаємо послідовно верхні кінці ординат прямими лініями. В результаті криволінійну трапецію $ABCD$ замінимо сумою n прямолінійних трапецій, площі яких s_1, s_2, $\ldots$, s_n легко обчислити.

Оскільки висота кожної з трапецій дорівнює:

$$h = \frac{b-a}{n},$$

то площа першої з них (заштрихованої) буде:

$$s_1 = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_0 + y_1}{2} = h\frac{y_0 + y_1}{2}.$$

Аналогічно, загальна формула для прощі одиночної трапеції може бути записана як:

$$s_n = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_{n-1} + y_n}{2} = h\frac{y_{n-1} + y_n}{2}.$$

Сумарна площа матиме вигляд:

$$S = s_1 + s_2 + \ldots + s_n = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n}{2}.$$

Виходячи з викладеного та враховуючи, що $y_k = f(x_k)$, одержуємо формулу трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right), \qquad (6.3)$$

Очевидно, що точність знаходження значення визначеного інтеграла за формулою трапецій залежить від кількості одиночних проміжків n.

Формула Симпсона.

Для одержання формули Симпсона (або парабол) використовують апроксимацію підінтегральної функції частинами квадратичних парабол на відповідних відрізках.

З'єднаємо вершини кожних трьох послідовних ординат дугами квадратичних парабол, в результаті чого, замість кожних двох елементарних прямолінійних трапецій, будемо розглядати одну елементарну трапецію з параболічною дугою. Площі відповідних трапецій позначимо: $s_{12},\ s_{34},\ s_{56},\ \ldots,\ s_{n-1,n}$

Розглянемо докладніше першу ділянку. Рівняння квадратичної параболи, вісь якої паралельна осі y, може бути записане як:

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 \qquad (6.4)$$

Парабола (6.4) проходитиме через точки підінтегральної кривої $(x_0;\ y_0)$, $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$ в тому випадку, якщо коефіцієнти $A_0,\ A_1,\ A_2$ будуть підібрані відповідним чином.

Вважаючи що: $x_0 = 0,\ x_1 = h,\ x_2 = 2h$, одержимо систему:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= A_0 \\ y_1 &= A_0 + A_1h + A_2h^2 \\ y_2 &= A_0 + 2A_1h + 4A_2h^2 \end{aligned}\right\}$$

розв'язавши яку, знаходимо значення коефіцієнтів:

$$A_0 = y_0; \qquad A_1 = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}; \quad A_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}. \qquad (6.5)$$

Площа s_{12}, згідно формулі (6.2) визначається інтегралом:

$$s_{12} = \int_0^{2h} y dx = \int_0^{2h} \left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\right) dx = 2A_0 h + 2A_1 h^2 + \frac{8}{3} A_2 h^3$$

Підставивши знайдені значення (6.5) в останній вираз та спростивши його, одержимо:

$$s_{12} = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

Аналогічно:

$$s_{34} = \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right), \quad \ldots \qquad s_{n-1,n} = \frac{h}{3}\left(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

Відповідно, сумарна формула матиме вигляд:

$$S = s_{12} + s_{34} + \ldots + s_{n-1,n} = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right),$$

а формула інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n} \cdot \left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Необхідно відзначити, що у формулі Симпсона, n завжди повинно бути парним числом.

Абсолютні похибки для формул трапецій та Симпсона можна оцінити такими формулами:

$$\varepsilon_{\text{тр}} \le \frac{h^2 \cdot (b-a) \cdot M_2}{12} \qquad \text{та} \qquad \varepsilon_{\text{пар}} \le \frac{h^4 \cdot (b-a) \cdot M_4}{180},$$

де $\quad h = \dfrac{(b-a)}{n},$

$$M_2 = \max\left|f''(x)\right|; \qquad M_4 = \max\left|f^{\text{IV}}(x)\right|.$$

Фактично, похибка формул обернено пропорційна другій та четвертій степені кількості проміжків, на які розбито інтервал для формул трапецій та парабол відповідно. Вигляд функції впливає на точність через максимальне значення другої та четвертої похідної.

Іншими словами, формула трапецій дає точне значення визначеного інтеграла для лінійних функцій, а формула парабол для функцій – поліномів третьої степені.

Розробка програми

Безпосередня розробка програмних функцій, що реалізують квадратурні формули трапецій чи Симпсона не викликає труднощів, оскільки обидві розглянуті формули являються комбінацією суми значень функції та відомих коефіцієнтів. З іншого боку, задача знаходження визначеного інтеграла рідко зустрічається окремо. Частіше доводиться мати справу з задачею, де необхідно знайти та використати декілька визначених інтегралів від різних функцій або з різними умовами інтегрування. На жаль, простого способу передати у програмну функцію обчислення інтеграла вирази різних функцій не існує. З іншого боку, при підготовці програми функції, які необхідно інтегрувати відомі, і їх можна описати у вигляді модуля **`function`** з селектором. Схожий спосіб створення «масиву» функцій може бути також використаний при розробці програм розв’язання систем нелінійних рівнянь або у схожих випадках.

Припустимо, що в розрахунках зустрічається чотири різні функції. Тоді модульна функція з селектором могла б мати вигляд:

```
Function myFunc(i:1..4; x:real):real;
Begin
Case i of
1: myFunc:= 2+x*3;
2: myFunc:= 4*x*pi;
3: myFunc:= exp(x-3)+sqr(x-4);
4: myFunc:= sqrt(x*x+1)+2*x;
End;
```

Для знаходження визначеного інтеграла від будь-якої з описаних функцій досить описати та використати функцію, яка має заголовок:

```
Function IntgrT(i:1..4;a,b:real;n:integer):real;
```

Вважаємо, що в обидві описані функції першим аргументом передається номер функції у «масиві» функцій. Інші аргументи функції, що реалізує інтегрування: a, b – межі інтегрування, n – кількість проміжків, на які розбивається інтервал інтегрування.

Зрозуміло, що всередині функції **IntgrT** має бути виклик функції **myFunc** вигляду:

```
S:= myFunc(2,p);
```

Що означає, що викликається функція **4*x*pi**, причому замість **x** підставляється значення, яке має змінна **p.**

При розробці функції, що реалізує формулу Симпсона, доцільно також перевіряти параметр **n** на його парність. Один із способів, який можна використати для забезпечення парності, є контроль залишку від ділення **n** на 2, і у випадку, якщо такий залишок не дорівнює нулю. збільшення **n** на одиницю.

Завдання

Розробити, скласти та відлагодити програму для інтегрування функцій заданого масиву за формулами трапецій та парабол .

Зробити висновки.

Рекомендована література: [6], [7].