Лабораторна робота № 4

Розробка програми для інтерполювання таблично заданих даних за першою формулою Ньютона

Мета роботи: практично засвоїти принципи роботи числових методів інтерполювання та апроксимації функцій та оволодіти прийомами програмування числових методів.

Теоретичні відомості

Задачі інтерполювання та апроксимації табличних даних досить часто зустрічаються в щоденній інженерній практиці. Найпростіша задача інтерполювання полягає в наступному. На відрізку *[a,b]* задано $n+1$ точку: x_0, x_1, …, x_n, які будемо називати вузлами інтерполювання, а також значення деякої функції $f(x)$ у цих точках:

$$f(x_0) = y_0 \quad f(x_1) = y_1 \quad \dots \quad f(x_n) = y_n \tag{4.1}$$

Необхідно побудувати функцію $F(x)$, що належить до відомого класу функцій і приймає у вузлах інтерполювання ті ж значення, що й $f(x)$:

$$F(x_0) = y_0 \quad F(x_1) = y_1 \quad \dots \quad F(x_n) = y_n \tag{4.2}$$

Геометрично це означає, що необхідно знайти криву $y=F(x)$ наперед заданого типу, що проходить через задану систему точок.

Існує значний набір методів побудови інтерполяційної функції, що відрізняються один від одного способом побудови та використання таблиць різниць. Найпростішою вважається перша інтерполяційна формула Ньютона.

Нехай для функції $y=f(x)$ задано значення для рівновіддалених значень незалежної змінної: $x_i=x_0 + i\cdot h$ $(i=0, 1, 2, \dots, n)$, де h – крок інтерполювання. Необхідно підібрати поліном $P_n(x)$ (степені не вище n), який приймає в точках x_i значення:

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,\dots,n) \tag{4.3}$$

Умова (4.3) еквівалентна тому, що

$$\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0 ,$$

при $m=0, 1, 2, \ldots, n$. Під Δ^m розуміють кінцеву різницю[1] відповідного порядку.

Інтерполяційний поліном будемо шукати у вигляді:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + a_3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) + \\ + \quad \ldots \quad + a_n \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \tag{4.4}$$

Використовуючи поняття узагальненої степені, формулу (4.4) можна записати у іншому вигляді:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0)^{[1]} + a_2 \cdot (x - x_0)^{[2]} + a_3 \cdot (x - x_0)^{[3]} + \ldots + a_n \cdot (x - x_0)^{[n]} \tag{4.4'}$$

Задача полягає у визначенні коефіцієнтів a_i $(i=0, 1, \ldots n)$ полінома $P_n(x)$. Прийнявши $x=x_0$ у формулі (4.4'), одержимо:

$$P_n(x_0) = y_0 = a_0$$

Щоб знайти коефіцієнт a_1, запишемо першу кінцеву різницю

$$\Delta P_n(x) = a_1 \cdot h + 2 \cdot a_2 \cdot (x - x_0)^{[1]} \cdot h + 3 \cdot a_3 \cdot (x - x_0)^{[2]} \cdot h + \ldots + \\ + n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{[n-1]} \cdot h$$

Вважаючи, що $x=x_0$, одержимо:

$$\Delta P_n(x_0) = \Delta y_0 = a_1 \cdot h;$$

звідки

$$a_1 = {\Delta y_0}/{1! \cdot h}.$$

Для визначення коефіцієнта a_2 запишемо кінцеву різницю другого порядку:

$$\Delta^2 P_n(x) = 2! h^2 a_2 + 2 \cdot 3 h^2 a_3 (x - x_0)^{[1]} + \ldots + (n-1) n h^2 a_n (x - x_0)^{[n-2]}.$$

[1] Ознайомитися з поняттям кінцевих різниць та порядком їх обчислення, а також з поняттям узагальненої степені рекомендується самостійно, користуючись, наприклад [6]

Прийнявши $x = x_0$, одержимо:

$$\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 = 2!h^2 a_2,$$

звідки

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}.$$

Послідовно продовжуючи цей процес, одержимо загальну формулу:

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i} \qquad (i = 0,1,2,\ldots,n)$$

де встановлено: $0! = 1$ та $\Delta^0 y = y$.

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів a_i у вираз (4.4'), одержимо інтерполяційний поліном Ньютона.

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)^{[2]} + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)^{[n]} \qquad (3.5)$$

Для практичного застосування інтерполяційну формулу Ньютона записують у дещо перетвореному вигляді. Для цього введемо нову змінну q за формулою:

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

тоді

$$\frac{(x - x_0)^{[i]}}{h^{[i]}} = \frac{(x - x_0)}{h} \cdot \frac{(x - x_0 - h)}{h} \cdot \frac{(x - x_0 - 2h)}{h} \ldots \frac{(x - x_0 - (i-1)h)}{h} =$$
$$= q(q-1)(q-2)\ldots(q - i + 1)$$

Підставляючи ці вирази у формулу (4.5), одержимо:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (4.6)$$

що можна розглядати як кінцевий вигляд інтерполяційної формули Ньютона.

Розробка програми

Виходячи з кінцевого вигляду інтерполяційної формули Ньютона (4.6), можна зауважити, що вона являє собою, в загальному випадку, суму k одночленів, якщо k – кількість точок у початковій таблиці. При цьому використовуються значення кінцевих різниць, починаючи з нульової (y_0), і закінчуючи n-ною $\Delta^n y_0$, $(n = k - 1)$. Другою складовою кожного одночлену є величина, яка для заданого значення x є константою; позначимо її через Q_i. Причому для першого складового ця величина становить $Q_0 = 1$, а кожне наступне значення можна знайти з попереднього за загальним виразом:

$$Q_i = \frac{Q_{i-1}(q - i + 1)}{i}.$$

Тому програма, що реалізує інтерполяційну формулу Ньютона, повинна включати, не враховуючи обов'язкових процедур вводу та виводу, всього дві частини:

1. Обчислення кінцевих різниць;
2. Побудова полінома.

Необхідно також відзначити, що описана вище формула Ньютона, опирається на таблицю з постійним кроком по x, тому, в загальному випадку, в програму доцільно включити процедуру для перевірки рівності $x_{i+1} - x_i = const$.

1. <u>Обчислення кінцевих різниць</u>. Як було відзначено, для побудови першої інтерполяційної формули Ньютона використовуються значення кінцевих різниць, починаючи з нульової (y_0) і закінчуючи n-ною $\Delta^n y_0$, $(n = k - 1)$. Схему одержання таких кінцевих різниць, для випадку $k = 5$ показано в таблиці 4.1

Оскільки використовуються тільки різниці $\Delta^i y_0$, іншими словами: тільки верхній виділений рядок таблиці, то усі різниці можна зберігати у масиві, який було створено для зберігання значень функції у вузлах інтерполяції.

Таблиця 4.1 – Схема одержання кінцевих різниць різних порядків.

	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	y_0	$y_1 - y_0$	$\Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$
1	y_1	$y_2 - y_1$	$\Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	
2	y_2	$y_3 - y_2$	$\Delta y_3 - \Delta y_2$		
3	y_3	$y_4 - y_3$			
4	y_4				

Таким чином, побудова таблиці кінцевих різниць у програмі може мати вигляд: (враховуючи, що значення функції у вузлах інтерполяції задані як **Y[1], Y[2],…,Y[k]**)

```
{Побудова таблиці різниць}
For i:=1 to k-1 do
    begin
    For j:=k downto i+1 do
        begin
        Y[j]:=Y[j]-Y[j-1];
    end;
end;
```

У результаті виконання такого циклу масив **Y** міститиме такі значення:
елемент **Y[1]** значення y_0;
Y[2] Δy_0;
Y[3] $\Delta^2 y_0$;
Y[4] $\Delta^3 y_0$;
Y[5] $\Delta^4 y_0$.

2. Побудова інтерполяційного полінома. Інтерполяційні формули рідко використовуються для знаходження одного окремого значення функції, що не співпадає з відомими вузлами. Частіше необхідно побудувати формулу, що дозволить знайти значення функції у будь-якій точці, що належить проміжку (x_0, x_k). Тому інтерполяційний поліном у програмі доцільно подавати у

вигляді функції. Вхідними даними для такої функції є: значення x_0, крок інтерполяції h, кількість точок $k+1$, масив кінцевих різниць різних порядків, що відповідає виділеному рядку таблиці, та абсциса точки x, значення функції у якій повинно бути обчислене. Очевидно, що при реалізації інтерполяційної формули у вигляді функції, усі значення, крім x, можуть бути як глобальними змінними, так і формальними параметрами. Значення x має задаватися у рядку виклику функції.

Опис функції, що реалізує першу інтерполяційну формулу Ньютона, за умови, що усі параметри, крім x, задаються глобальними змінними, наведено нижче.

```
{Інтерполяційна формула}
Function Newton1(x:real):real;
var  ii: integer;
     S,Q,qq: real;
Begin
qq:= (x-x0)/h;
S:= Y[1];
Q:= 1;
For ii:= 1 to k do
begin
   Q:= Q * (qq-ii+1) / ii;
   S:= S + Y[ii+1] * Q
end;
Newton1:= S;
End;
```

Тепер функцію Newton1 можна викликати у будь-якому місці програми після знаходження кінцевих різниць і одержати відповідне значення таблично заданої функції. Якщо є потреба застосувати інтерполяційну формулу Ньютона до більше ніж одного набору даних, з’являється необхідність у додатковій універсальній процедурі знаходження таблиці кінцевих різниць і наступному виклику уже описаної функції з метою обробки одержаної таблиці.

Завдання

Розробити, скласти та відлагодити програму інтерполювання таблично заданої функції за першою формулою Ньютона.

Варіанти:

Інтерполювання за другою формулою Ньютона.

Програма інтерполювання та побудови графіка за табличними даними.

Зробити висновки.

Рекомендована література: [6], [7], [8]