Лабораторна робота № 2

Розробка програми розв'язання системи лінійних рівнянь методом Гаусса

Мета роботи: практично засвоїти принципи роботи з матричними структурами даних та освоїти прийоми розробки програм.

Теоретичні відомості

Метод Гаусса є одним із найрозповсюдженіших методів розв'язання нормально визначених систем лінійних рівнянь і полягає в послідовному виключенні невідомих. Суть методу Гаусса полягає в тому, що вихідна матриця системи лінійних рівнянь через лінійні перетворення приводиться до трапецевидного (в частинному випадку – трикутного) вигляду: коли усі елементи, що знаходяться нижче головної діагоналі дорівнюють нулю.

Для простоти математичних викладок обмежимось системою чотирьох рівнянь з чотирма невідомими:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & a_{13}\cdot x_3 & + & a_{14}\cdot x_4 & = & a_{15} \\ a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & a_{23}\cdot x_3 & + & a_{24}\cdot x_4 & = & a_{25} \\ a_{31}\cdot x_1 & + & a_{32}\cdot x_2 & + & a_{33}\cdot x_3 & + & a_{34}\cdot x_4 & = & a_{35} \\ a_{41}\cdot x_1 & + & a_{42}\cdot x_2 & + & a_{43}\cdot x_3 & + & a_{44}\cdot x_4 & = & a_{45} \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

Нехай $a_{11}\neq 0$ – провідний елемент. Розділивши коефіцієнти першого рівняння системи на a_{11}, одержимо:

$$x_1 + b_{12}\cdot x_2 + b_{13}\cdot x_3 + b_{14}\cdot x_4 = b_{15}, \qquad (2.2)$$

де

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j > 1).$$

Використовуючи рівняння (2.2), можна виключити з системи (2.1) невідому x_1. Для цього достатньо від другого рівняння системи (2.1) відняти рівняння (2.2), помножене на a_{21}, від третього рівняння системи (2.1) відняти рівняння (2.2), помножене на a_{31}, тощо. В результаті одержимо систему з трьох рівнянь:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{22}^{(1)}\cdot x_2 & + & a_{23}^{(1)}\cdot x_3 & + & a_{24}^{(1)}\cdot x_4 & = & a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}\cdot x_2 & + & a_{33}^{(1)}\cdot x_3 & + & a_{34}^{(1)}\cdot x_3 & = & a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}\cdot x_2 & + & a_{43}^{(1)}\cdot x_2 & + & a_{44}^{(1)}\cdot x_2 & = & a_{45}^{(1)} \end{array}\right\} \qquad (2.1')$$

де коефіцієнти $a_{ij}^{(1)}$ $(i, j \geq 2)$ обчислюються за формулою:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}\cdot b_{1j} \quad (i, j \geq 2) \qquad (2.3)$$

Повторивши процедуру ділення коефіцієнтів першого рівняння нової системи на її провідний елемент (2.2') і виключивши x_2 з розгляду, одержимо систему двох лінійних рівнянь (2.1'').

$$x_2 + b_{23}^{(1)}\cdot x_3 + b_{24}^{(1)}\cdot x_4 = b_{25}^{(1)}, \qquad (2.2')$$

де

$$b_{2j}^{(1)} = a_{2j}^{(1)} \big/ a_{22}^{(1)} \quad (j > 2).$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{33}^{(2)}\cdot x_3 & + & a_{34}^{(2)}\cdot x_4 & = & a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)}\cdot x_3 & + & a_{44}^{(2)}\cdot x_4 & = & a_{45}^{(2)} \end{array}\right\}, \qquad (2.1'')$$

де

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}\cdot b_{2j}^{(1)} \quad (i, j \geq 3).$$

Розділивши коефіцієнти першого рівняння системи (2.1'') на новий провідний елемент - $a_{33}^{(2)}$, одержимо:

$$x_3 + b_{34}^{(2)}\cdot x_4 = b_{35}^{(2)}, \qquad (2.2'')$$

де

$$b_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(2)} \big/ a_{33}^{(2)} \quad (j > 3).$$

Виключивши за допомогою вже описаних операцій x_3 з розгляду, одержимо:

$$a_{44}^{(3)}\cdot x_4 = a_{45}^{(3)}, \qquad (2.1''')$$

де

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{i3}^{(2)} \cdot b_{3j}^{(2)} \quad (i, j \geq 4).$$

Таким чином, очевидно, що без порушення математичної точності, система (2.1) може бути записана у вигляді (2.4):

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & a_{13} \cdot x_3 & + & a_{14} \cdot x_4 & = & a_{15} \\ & & a_{22}^{(1)} \cdot x_2 & + & a_{23}^{(1)} \cdot x_3 & + & a_{24}^{(1)} \cdot x_4 & = & a_{25}^{(1)} \\ & & & & a_{33}^{(2)} \cdot x_3 & + & a_{34}^{(2)} \cdot x_4 & = & a_{35}^{(2)} \\ & & & & & & a_{44}^{(3)} \cdot x_4 & = & a_{45}^{(3)} \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

Система (2.4) може бути досить просто розв'язана:

$$x_4 = a_{45}^{(3)} \big/ a_{44}^{(3)} \tag{2.5}$$

$$x_3 = \frac{a_{35}^{(2)} - a_{34}^{(2)} \cdot x_4}{a_{33}^{(2)}} \tag{2.6}$$

$$x_2 = \frac{a_{25}^{(1)} - a_{24}^{(1)} \cdot x_4 - a_{23}^{(1)} \cdot x_3}{a_{22}^{(1)}} \tag{2.7}$$

$$x_1 = \frac{a_{15} - a_{14} \cdot x_4 - a_{13} \cdot x_3 - a_{12} \cdot x_2}{a_{11}} \tag{2.8}$$

Послідовність рівностей (2.5)-(2.8) називається зворотнім ходом методу Гаусса.

Таким чином, процес розв'язку системи лінійних рівнянь за методом Гаусса зводиться до побудови еквівалентної системи лінійних рівнянь з трикутною матрицею – прямого ходу і послідовного знаходження коренів, починаючи з більших номерів – зворотного ходу.

Розробка програми

Програма розв'язку системи лінійних рівнянь методом Гаусса повинна містити наступні послідовні частини:

1. Блок введення елементів матриці початкової системи;
2. Прямий хід;
3. Зворотний хід;

4. Вивід результатів обчислень.

Розкриємо зміст частин більш детально.

1. Блок введення елементів матриці початкової системи. Цей блок операторів повинен забезпечити:

– введення в діалоговому режимі кількості рівнянь у поточній системі;
– аналіз сумісності вказаної системи рівнянь з заданими в блоці описів програми константами та максимальними розмірами масивів;
– організацію подвійного циклу для діалогового вводу елементів розширеної матриці системи.

Якщо кількість рівнянь позначити як **N**, то розмірність матриці становитиме **N** × **N+1**. Відповідними повинні бути і межі зміни індексів циклів.

2. Прямий хід передбачає безпосереднє перетворення матриці системи до трикутного вигляду. Як і при програмуванні більшості числових методів, якщо метод не передбачає іншого, слід уникати використання великої кількості додаткових структур даних. Тому, усі перетворення матриці рекомендується проводити в рамках однієї структури, послідовно замінюючи одні рядки даних іншими. Для виконання перетворень необхідно організувати цикли:

– зовнішній – за номером перетворення – відповідає верхньому індексу в дужках в "штрихованих" формулах (2.1'), (2.2'), (2.1") тощо. Фактично цей номер співпадає з номером стовпчика матриці, коефіцієнти якого перетворюються в нуль. Необхідно пам'ятати, що такий індекс повинен змінюватись в межах від 1 до N-1;
– внутрішній – за номером рядка, до якого застосовується поточне перетворення. Початкова межа завжди на одиницю більша від поточного значення індексу зовнішнього циклу, оскільки елементи першого стовпчика зводяться до нуля в рядках, починаючи з другого, другого стовпчика – в рядках, починаючи з третього, тощо;

– додатковий – необхідний для організації обробки усіх елементів одного рядка за однаковим алгоритмом. Нижня межа індексів збігається з поточним значенням індексу зовнішнього циклу, верхня – N+1, оскільки перетворення повинні охоплювати усю матрицю. Оскільки саме всередині цього циклу в нуль перетворюється провідний елемент рядка, то додатковий цикл варто організувати, починаючи з максимальних значень і закінчуючи мінімальними, з використанням варіанту оператора циклу **`for … downto`**.

Тіло циклу може містити один вираз:

```
A[i,k]:= A[i,k]-A[j,k]*A[i,j]/A[j,j]
```

де j – індекс зовнішнього циклу;
i – індекс внутрішнього циклу;
k – індекс додаткового циклу;

3. Зворотній хід повинен забезпечити послідовне знаходження коренів системи рівнянь. Єдиний індекс операції знаходження коренів – номер кореня, повинен змінюватись від N до 1. Однак, він дозволить визначити тільки частину складових, що входять до формул (2.5)-(2.8), а саме, відповідний корінь **`(X[i])`**, знаменник **`(A[i,i])`** і частину чисельника **`(A[i,n+1])`**. Інша частина чисельника є змінною за кількістю складових, і залежить від віддаленості поточного кореня від останнього рівняння. В останньому рівнянні ця частина рівна нулю, у передостанньому має одну складову, тощо. Рекомендується знайти цю частину у вигляді суми добутків коефіцієнтів поточного рядка, що знаходяться правіше діагонального елемента на відповідні значення уже відомих коренів системи рівнянь. В цілому зворотній хід може мати вигляд:

```
      For i:=N downto 1 do
        Begin
        S:=0;
            For m:=i+1 to n do
            S:=S+A[i,m]*X[m]
        X[i]:=(A[i,n+1]-S)/A[i,i]
        End;
```

4. Вивід результатів обчислень організується як простий цикл з межами від 1 до N.

Завдання

Розробити, скласти та відлагодити програму розв'язання системи лінійних рівнянь методом Гаусса

Варіанти:

Програма методу Гаусса з вибором головного елемента.

Програма методу Гаусса з нормалізацією провідних рядків.

Зробити висновки.

Рекомендована література: [3], [6], [9].