Лабораторна робота № 1

Розв'язок алгебраїчних рівнянь методом дотичних (Ньютона)

Мета роботи: оволодіння практичними навиками розв'язку алгебраїчних рівнянь методом дотичних (Ньютона), а також вироблення практичних навичок з використання числових методів для розв'язку прикладних задач.

Теоретичні відомості

Якщо алгебраїчне рівняння достатньо складне, то його корені досить рідко вдається знайти аналітично, а значить точно. Крім того, у ряді випадків рівняння може містити коефіцієнти, значення яких відомі лише наближено, а значить сама постановка задачі про знаходження точних коренів втрачає зміст. Саме тому важливе значення мають способи наближеного знаходження коренів алгебраїчних рівнянь та оцінка їх точності.

Нехай задано рівняння

$$f(x)=0 \qquad (1.1)$$

де функція $f(x)$ визначена та неперервна на деякому інтервалі $a<x<b$.

В деяких випадках можуть бути необхідними існування та неперервність першої $f'(x)$, а інколи навіть другої $f''(x)$ похідних.

Всяке значення ξ, що перетворює значення функції в нуль: $f(\xi)=0$, називається коренем рівняння (1.1) або нулем функції.

Для спрощення, будемо вважати, що рівняння (1.1) має лише ізольовані корені, або іншими словами, що для кожного кореня рівняння (1.1) існує окіл, що не містить інших коренів цього рівняння.

Наближене знаходження ізольованих дійсних коренів рівняння (1.1) зазвичай складається з двох етапів:

1) відокремлення коренів – встановлення досить малих інтервалів (a,b), на яких міститься один і тільки один корінь рівняння (1.1).
2) уточнення наближених коренів – доведення їх до заданого рівня

точності.

Для відокремлення коренів часто користуються наслідками теореми: Якщо неперервна функція $f(x)$ має значення різних знаків на кінцях відрізка (α,β), $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, то такий інтервал містить щонайменше один корінь рівняння (1.1), такий, що $f(\xi)=0$. Корінь ξ виявиться єдиним коренем рівняння, якщо похідна $f'(x)$ існує і зберігає свій знак на усьому інтервалі (α,β).

Процес відокремлення коренів, у зв'язку зі сказаним вище, доцільно починати з встановлення знаків функції $f(x)$ в граничних точках області її існування. Потім необхідно знайти значення функції у окремих проміжних точках інтервалу. Результатом таких дій являється набір інтервалів (a_i,b_i), кожен з яких містить корінь рівняння (1.1).

В загальному випадку, область визначення функції може бути і $(-\infty,+\infty)$, а проміжні точки необхідно вибирати напівінтуїтивно, керуючись загальним виглядом рівняння. Однак, для більшості реальних технічних задач, початковий інтервал, чи наближене місце знаходження кореня чи коренів відоме, і визначається особливостями фізичних процесів та обмеженнями технічних можливостей.

Якщо відомий початковий інтервал, і він є досить малим, для умов конкретної задачі, можна безпосередньо переходити до уточнення коренів.

Якщо початковий інтервал досить великий, доцільно виконати декілька повторів методу поділу інтервалу навпіл, для більш точної локалізації коренів.

Одним з найпростіших в реалізації методів розв'язання алгебраїчних рівнянь – є метод Ньютона.

Нехай корінь ξ рівняння $f(x)=0$ знаходиться на проміжку (a,b), причому $f'(x)$ та $f''(x)$ неперервні та зберігають свої знаки для усіх x, що належать цьому проміжку. Знайшовши деяке $n-$е наближення значення кореня $x_n \approx \xi$ $(a \le x_n \le b)$, його можна уточнити за методом Ньютона. Нехай

$$\xi = x_n + h_n, \tag{1.2}$$

де h_n вважаємо малою величиною. Звідси, застосувавши формулу Тейлора, одержимо:

$$0 = f(x_n + h_n) \approx f(x_n) + h_n f'(x_n).$$

А значить

$$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Якщо внести відповідну поправку у формулу (1.2), знайдемо вираз для наступного наближення кореня:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0,1,2,\ldots). \tag{1.3}$$

Геометрично метод Ньютона еквівалентний заміні невеликої дуги кривої $y = f(x)$ дотичною, проведеною у точці поточного наближення розв'язку.

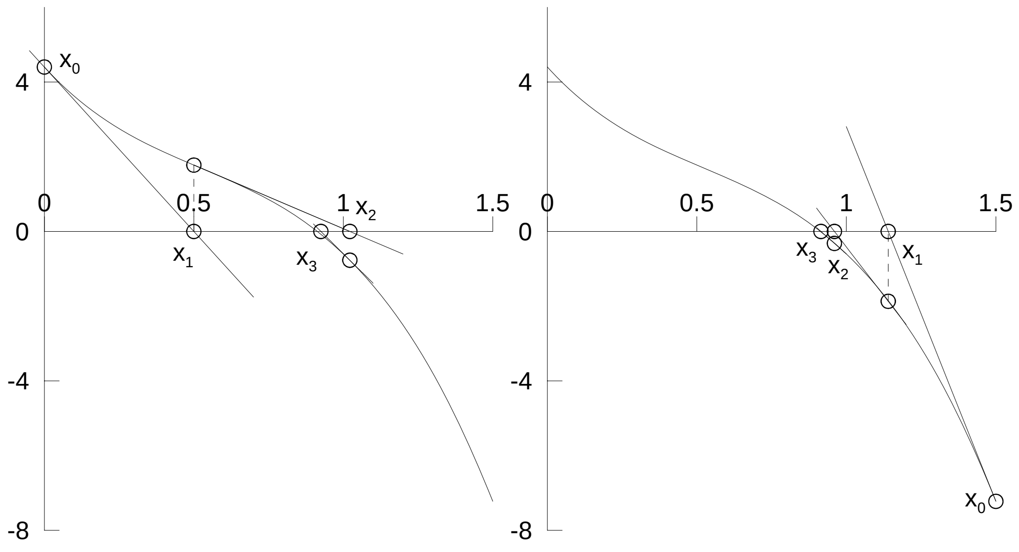

Рисунок 1.1. Графічний вигляд ітерацій метода Ньютона залежно від положення початкової точки.

Таким чином, використовуючи метод Ньютона, можна знайти корінь рівняння з наперед заданою точністю.

Для оцінки похибки $n-$го наближення x_n можна користуватись загальною формулою:

$$\left|\xi - x_n\right| \le \frac{\left|f\left(x_n\right)\right|}{m_1}, \qquad (1.4)$$

де m_1 - найменше значення $\left|f'(x)\right|$ на відрізку (a,b).

Виходячи з того, що в області, близькій до кореня, для великої кількості рівнянь, значення похідної $f'(x)$ практично не змінюється, то за критерій зупинки пошуку можна використовувати нерівність:

$$\left|\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}\right| < \varepsilon, \qquad (1.5)$$

де ε - задана точність обчислень.

Розробка програми

Програма, що реалізує метод Ньютона повинна містити:

1. опис функції,
2. процедуру інтерактивного введення наближення,
3. обчислення похідної,
4. знаходження наближених коренів,
5. оцінку точності,
6. спосіб оцінки того, збігається обчислювальний процес чи розбігається,
7. виведення результатів обчислень.

Розкриємо зміст частин більш детально.

1. Опис функції. Алгебраїчне рівняння в програмі може задаватися за допомогою простого опису функції. Наприклад:

```
Function ff1(x:real):real;
    begin
    ff1:= sqr(sqr(x))+2*x*x*x-x-1
    end
```

2. Процедура інтерактивного введення наближення. Початкове наближення необхідно одержувати від користувача у діалоговому режимі за допомогою стандартних операторів вводу-виводу.

3. Обчислення похідної. Для універсальності програми, обчислення похідної доцільно проводити чисельно, використовуючи формулу:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + \delta) - f(x_i - \delta)}{2\delta}, \tag{1.6}$$

де δ - досить мале значення, більше нуля.

У програмі, це може бути реалізовано у вигляді додаткової функції користувача:

```
Function dfdx(x:real):real;
var dlt:real;
    begin
    dlt:=1e-3;
    dfdx:=(ff1(x+dlt)-ff1(x-dlt))/(2*dlt);
end;
```

Залежно від поставленої задачі таку функцію можна удосконалити, задавши правило зміни параметра `dlt` при незадовільному значенні похідної.

4. Знаходження наближених коренів проводиться за формулою (1.3) наведеною в теоретичній частині.

1. Оцінка точності в програмі обчислюється за формулою (1.5) і виступає одним із критеріїв завершення процесу. Наприклад:

```
while abs(ff1(x)/dfdx(x))>eps do
        begin
         …
        end;
```

6. Для оцінки того, збігається обчислювальний процес чи ні, необхідно оцінювати абсолютне значення функції на послідовних ітераціях. Якщо абсолютне значення функції на кожній наступній ітерації менше попереднього, то можна вважати, що метод збігається. Якщо ж на деякій ітерації відбувається збільшення значення функції, то необхідно проаналізувати ще одну ітерацію.

7. Вивід результатів обчислень організується як просте виведення останнього одержаного перед зупинкою циклу значення наближеного кореня.

При необхідності наведення графічних результатів розв’язання нелінійного рівняння необхідно оцінити можливий інтервал значень аргументу та функції, провести масштабування області екрану по вертикалі та горизонталі, вивести графік рівняння та точки, що знаходяться на послідовних ітераціях.

Завдання

Розробити, скласти та відлагодити програму розв'язання алгебраїчного рівняння методом дотичних (Ньютона) з побудовою графіка функції

Зробити висновки.

Рекомендована література: [3], [6], [9].